Universidad Andrés Bello

FMM235: Cálculo en Varias Variables

Guía 2

P1. Grafique las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decribiendo además el dominio en el cual están definidas:

a) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

b) $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

c) $f(\vec{x}) = A - \|\vec{x}\|^k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, donde A es un número real cualquiera.

d) $f(\vec{x}) = B - \frac{1}{\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, donde B es un número real cualquiera.

e) $f(\vec{x}) = \sin\|\vec{x}\|$.

f) $f(\vec{x}) = \log|\cos||\vec{x}|||$.

g) $f(\vec{x}) = e^{\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

h) $f(\vec{x}) = e^{-\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

i) $f(\vec{x}) = e^{-1/\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

j) $f(\vec{x}) = e^{-\beta\|\vec{x}\|^2} \operatorname{sen}\|\vec{x}\|$, donde β es un número real distinto de cero.

k) $f(\vec{x}) = \sqrt{1 - \|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

l) $f(\vec{x}) = \log(\sqrt{1 - \|\vec{x}\|^k})$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

m) $f(\vec{x}) = \log\log\|\vec{x}\|$.

n) $f(\vec{x}) = \arctan||\vec{x}||$.

ñ) $f(\vec{x}) = \langle\vec{x}, \vec{c}\rangle e^{\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2}$, donde $\vec{c} \neq \vec{0}$.

P2. Grafique las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ y también $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

b) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}$ y también $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}$, donde (a_1, a_2) toma los siguientes valores:

1) $(a_1, a_2) = (1, 1)$.

2) $(a_1, a_2) = (2, \frac{1}{2})$.

3) $(a_1, a_2) = (\frac{1}{3}, 3)$.

P3. Calcule el vector gradiente de las funciones dadas en P1 (para $n = 2$) y en P2 en los puntos donde las funciones estén bien definidas. Eso debería permitirle calcular el diferencial de ellas en las siguientes direcciones:

a) $\vec{h} = (1, 1)$.

b) $\vec{h} = (1, -1)$.

c) $\vec{h} = (-1, -1)$.

d) $\vec{h} = (-1, 1)$.

P4. Considere la siguiente función:

- $f(x_1, x_2) = \frac{x_1(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.
- $f(x_1, x_2) = 0$ si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

a) Estudie la continuidad de $f(x_1, x_2)$ en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

b) Usando la definición de derivada parcial a través de límites, calcule el gradiente de $f(x_1, x_2)$ en $(0, 0)$.

P5. Considere la función dada por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 2x_1 x_2 \, \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{para} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudie la continuidad de f en todo $\mathbb{R}^2$.

P6. Calcule el límite

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2\, x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \, .$$

P7. Escriba la fuerza $\vec{F}$ puntual que provoca la siguiente trayectoria de una partícula de masa igual a m en el vacío:

$\vec{x}(t) = (\ f(t) \cos t\ ,\ f(t) \operatorname{sen} t\ ,\ g(t)\ )$, donde f y g son funciones dos veces diferenciables. Estudie además la energía cinética asociada al movimiento, en particular el cambio de esta con respecto a t.

P8. *a*) Calcule la norma del gradiente de las funciones f en P1 y P2 sólo donde esté bien definido.

b) Calcule la norma del gradiente de $\log f$ para las funciones f en P1 y P2 sólo donde esté bien definido.

P9. Calcule el Hessiano de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas en P1 sólo donde estén bien definidas. Usando ello obtenga expresiones para el Laplaciano de estas. Haga lo mismo para las funciones dadas en P2.

P10. Realice nuevamente los ejercicios de P1 para $n = 2$ reemplazando la norma $\|\cdot\|$ por la norma $\|\cdot\|_P$ dada en P13 de la Guía 1, usando las siguientes matrices P:

$$P_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} , \ P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} , \ P_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \, .$$

Realice P8 y P9 para las funciones así obtenidas.

P11. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial cuyas segundas derivadas son continuas en todas las direcciones. Demuestre lo siguiente:

a) $div \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = 0$.

b) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) = \vec{\nabla}(div \cdot \vec{g}) - \triangle \vec{g}$.

P12. Suponga ahora que las funciones dadas en P1 representan campos de temperatura en $\mathbb{R}^3$. Obtenga una expresión para el cambio térmico temporal que experimenta una partícula que sigue la trayectoria descrita en P7.

P13. Una partícula se mueve en $\mathbb{R}^3$ de tal manera que su aceleración $\vec{a}(t)$ es constante y dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \hat{k}\ (resp.),$$

donde $\vec{v}(t)$ es la velocidad de la partícula en el instante t.

Se sabe además que:

- La posición $\vec{x}(t)$ de la partícula cuando $t = 0$ es $-\hat{k}$,
- La velocidad $\vec{v}(t)$ de la partícula cuando $t = 0$ es $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

Usando todos los datos dados encuentre en que instante t y en que punto $\vec{x}(t)$ de $\mathbb{R}^3$ la partícula cruza el plano $x_3 = 0$.

P14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable. Dado que:

- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1) = 1$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,1) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,1) = 1$.
- $h(t) = f(t^2, 1 + t^3))$.

Calcule:

a) $\dfrac{dh}{dt}(0)$.

b) $\dfrac{d^2h}{dt^2}(0)$.

P15. Considere la función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(r,t) = t^n e^{-r^2} .$$

Encuentre el valor de n de manera que $f(r,t)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \{ r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \} .$$

P16. Una ecuación muy importante en Física Matemática es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

Suponga que la función $f(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace en las coordenadas x, y. Demuestre que la función

$$g(x,y) = f(x - 2y, 2x + y)$$

también satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 .$$

P17. Si $z = f(x,y)$, donde $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, pruebe que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\ .$$