Universidad Andrés Bello

FMM235: Cálculo en Varias Variables

Guía 4

P1. Usando las identidades de Gauss-Green en el plano y el campo de fuerzas

$$\vec{F}(\vec{x}) = (-x_2, x_1, 0)/2 ,$$

calcule el área de la región acotada Ω en el plano $\{x_3 = 0\}$ cuya frontera está dada por la curva $\Gamma = \partial\Omega$ en los siguientes casos:

a) $\{x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1\}$ recorrida en el sentido anti-horario.

b) $\{x_1(t) = \cos^3 t,\ x_2(t) = \operatorname{sen}^3 t,\ t \in [0, 2\pi]\}$.

c) $\{x_1(t) = 2\cos t - \cos 2t,\ x_2(t) = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t,\ t \in [0, 2\pi]\}$.

d) $\{x_1(t) = 2\cos t + \cos 2t,\ x_2(t) = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t,\ t \in [0, 2\pi]\}$.

e) $\{x_1(t) = 1/2 \operatorname{sen} 2t,\ x_2(t) = \operatorname{sen} t,\ t \in [0, \pi]\}$.

f) $\{x_1(t) = 2a\cos t - a\operatorname{sen} 2t,\ x_2(t) = b\operatorname{sen} t,\ t \in [0, 2\pi]\}$.

g) $\{x_1(t) = 3at/(1 + t^3),\ x_2(t) = 3at^2/(1 + t^3),\ t \in \mathbb{R}_+\}$.

h) $\vec{r}(t) = (\ 2a\cos t - a\operatorname{sen} 2t\ ,\ b\operatorname{sen} t\ )$, donde $t \in [0, 2\pi]$, con a y b constantes positivas.

P2. Usando las identidades de Gauss-Green en el plano y el campo de fuerzas

$$\vec{F}(\vec{x}) = (-\alpha x_2^2, \beta x_1^2, 0)/2 ,$$

calcule el centro de masas de las regiones en P1. Haga uso de las simetrías evidentes y de los resultados ya obtenidos (en P1). Para ello resulta útil esbozar las curvas que acotan a Ω.

P3. Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$4x_1^2 + 9\,(x_2 - 1)^2 = 36 .$$

a) Deduzca alguna de las fórmulas del área usando el teorema de Gauss-Green en el plano, y a través de esa identidad calcule el área de la región encerrada por la curva $\mathcal{C}$.

b) Encuentre el centro de masa de la región encerrada por la curva $\mathcal{C}$.

P4. Considere la región Ω contenida en el plano $\mathbb{R}^2$ dada por la intersección de las regiones

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1$$

y

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2 .$$

Calcule el área de dicha región usando el Teorema de Gauss-Green.

P5. Usando el teorema de Gauss-Green calcule el área de la región Ω limitada por las curvas

$$x_2 = x_1^2 ,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 ,$$

con x_2 mayor o igual a cero.

P6. Encuentre el área de la región plana Ω en $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x_2 = x_1^2 \ , \ x_1^2 + x_2^2 = 2x_2 \ , \ x_2 = -\sqrt{3}x_1 \ ,$$

y que contiene al punto $(0,1)$.

P7. Sea D la región del primer cuadrante limitada por las rectas $x_1 + x_2 = 4, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0$ y el arco correspondiente del círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$ en el primer cuadrante. Calcule ambos lados de las dos identidades de Gauss-Green en el plano para el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2) = (\ -x_1^2 x_2 \ , \ x_2^2 x_1 \ )$$

en la región D.

P8. Use las identidades de Gauss-Green para hallar el centro de masas del semicírculo cuyos puntos satisfacen las desigualdades

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_1 \ ,$$

$$x_2 \geq 0 \ .$$

P9. Usando las identidades de Gauss-Green en el plano halle la circulación anti-horaria y el flujo hacia el exterior del campo $\vec{F}$ en la región Ω en los siguientes casos:

a) El campo $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por $(x_1 - x_2, x_2 - x_1)$, mientras que Ω es el cuadrado limitado por las rectas $\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 1\}, \{x_2 = 0\}$ y $\{x_2 = 1\}$.

b) El campo $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por $(x_1^2 + 4x_2, x_1 + x_2^2)$, mientras que Ω es el cuadrado limitado por las rectas $\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 1\}, \{x_2 = 0\}$ y $\{x_2 = 1\}$.

c) El campo $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por (x_2^2, x_1), mientras que Ω es el cuadrado cuyos vértices son $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ y $(-1,-1)$.

d) El campo $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por $(x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2)$, mientras que Ω es el triángulo limitado por las rectas $\{x_2 = 0\}, \{x_1 = 3\}$ y $\{x_1 = x_2\}$.

e) El campo $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por $(x_1 + x_2, -x_1^2 - x_2^2)$, mientras que Ω es el triángulo limitado por las rectas $\{x_2 = 0\}, \{x_1 = 1\}$ y $\{x_1 = x_2\}$.

f) El campo $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por $(x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2)$, mientras que Ω es el triángulo limitado por las rectas $\{x_1 = 0\}, \{x_2 = 0\}$ y $x_1/a + x_2/b = 1$.

P10. Sea $\Omega = \Omega(R_1, R_2) = \{ \ \vec{x} \mid R_1 \leq \|\vec{x}\| \leq R_2 \ \}$, donde $0 < R_1 \leq R_2$. Usando las identidades de Gauss-Green en el plano:

a) Halle la circulación anti-horaria de del campo $\vec{F}(\vec{x})$ en la región Ω si $\vec{F}(\vec{x})$ está dado por $\vec{\nabla} f(\vec{x})$, para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido según:

1) $f(\vec{x}) = \|x\|^k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
2) $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
3) $f(\vec{x}) = e^{\|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
4) $f(\vec{x}) = e^{-\|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
5) $f(\vec{x}) = \sqrt{1 - \|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, con $R_2 \leq 1$.
6) $f(\vec{x}) = \log \sqrt{1 - \|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, con $R_2 < 1$.
7) $f(\vec{x}) = \log \log \|\vec{x}\|$, donde $1 < R_1$.

b) Calcule $\int_\Omega \triangle f(\vec{x}) dx_1 dx_2$ para las f's anteriores, donde $\triangle = div \cdot \vec{\nabla}$ denota el operador de Laplace (o Laplaciano) en $\mathbb{R}^2$.

Sugerencias: Para la circulación deduzca un argumento válido para todos los f's, mientras que para la parte *b*) es recomendable revisar los cálculos realizados en P6 de la Guía 2 (y la materia de clases correspondiente) o bien aquellos realizados en P5 de la misma Guía.

P11. Repita P10 usando $\log f$ en vez de f para los f allí dados, tomando en cuenta los valores de R_1 y R_2 para que las operaciones estén bien definidas.

Sugerencias: Las mismas que en P10.

P12. Interprete, en P1, P2, P9,P10 y P11, los campos $\vec{F}(\vec{x})$ como campos eléctricos en las regiones Ω. Discuta de manera heurística.

P13. Interprete, en P1, P2, P9, P10 y P11, los campos $\vec{F}(\vec{x})$ como líneas de flujo de un fluido en las regiones Ω. Discuta de manera heurística.

P14. Verifique la identidad de Gauss-Green para la **circulación** del campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{1 + x_1^2 + 2x_2^2} \, , \, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + 2x_2^2} \right)$$

en la región Ω acotada por la curva

$$\Gamma = \{ \ \vec{x} \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \ \}$$

recorrida en el sentido anti-horario.

P15. Considere el campo

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_1^2 + x_2^2 \ , \ x_1^2 + x_2^2 \ )$$

y la región Ω que consiste en el triángulo limitado por las rectas

$$\{ \ x_1 = 0 \ \} \ , \ \{ \ x_2 = 0 \ \} \text{ y } \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1 \ .$$

Usando las identidades de Gauss-Green:

a) Calcule la circulación anti-horaria de $\vec{F}$ en la frontera de Ω.

b) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la frontera de Ω.

P16. Resuelva la integral

$$\oint_\Gamma \{ \ (\ 1 + e^{\sqrt{x_1}} \ ) dx_1 + (\ x_1^2 + \cos x_2^2 \ ) dx_2 \ \} \ ,$$

donde Γ es la curva cerrada ubicada en el primer cuadrante conformada por los arcos de circunferencia de radios 1 y 2, respectivamente, y por los segmentos rectilineos

$$1 \leq x_1 \leq 2$$

en el eje x_1, y de manera similar

$$1 \leq x_2 \leq 2$$

en el eje x_2.

P17. Calcule la integral

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \ ,$$

donde

$$f(x_1, x_2) = \cos(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}) \ ,$$

mientras que D es el triángulo cuyos vértices son $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$.

P18. Considere integrales del tipo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde Γ es una curva suave contenida en una región simplemente conexa de $\mathbb{R}^3$. Diga si $\vec{F}$ se puede considerar como un campo de fuerza conservativo, y si es así, encuentre el potencial que le genera en los siguientes casos:

a) $\vec{F}(\vec{x}) = (-x_2, x_1, 0)$.

b) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2)$.

c) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 \operatorname{sen} x_3, x_1 \operatorname{sen} x_3, x_1 x_2 \cos x_3)$.

d) $\vec{F}(\vec{x}) = (e^{x_1} \cos x_2, -e^{x_1} \operatorname{sen} x_2, x_3)$.

e) $\vec{F}(\vec{x}) = e^{x_2 + 2x_3}(1, x_1, 2x_1)$.

P19. En $\mathbb{R}^2$ considere el campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\frac{x_1 x_2}{\sqrt{1 + x_1^2}}, \sqrt{1 + x_1^2}) \ .$$

Calcule la integral de línea $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ para las siguientes curvas Γ:

a) Γ es el trazo rectilíneo que une el punto $(0,1)$ con $(1,2)$.

b) Γ es el círculo $x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

c) Γ es el arco de la parábola $x_2 = x_1^2 + 1$ entre los puntos $(0,1)$ y $(1,2)$.

P20. Sólo para los campos de fuerza conservativos dados en P18 evalúe $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ a lo largo de la trayectoria $\Gamma = \{(g(t)\cos t, g(t)\operatorname{sen} t, h(t)) | t \in [0, 2\pi]\}$, donde g y h son funciones suaves de t.

P21. Para todos los campos de fuerza $\vec{F}$ dados en P18 evalúe $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ a lo largo de la trayectoria $\Gamma = \{(t,t,t) | t \in [0, \pi/2]\}$.

P22. Calcule la integral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \ , \ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \ , \ x_3) \ ,$$

con Γ siendo:

a) La intersección entre el cilindro $(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1$ y el plano $x_1 + x_3 = 1$.

b) La intersección entre el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$ y el plano $x_1 + x_3 = 1$.