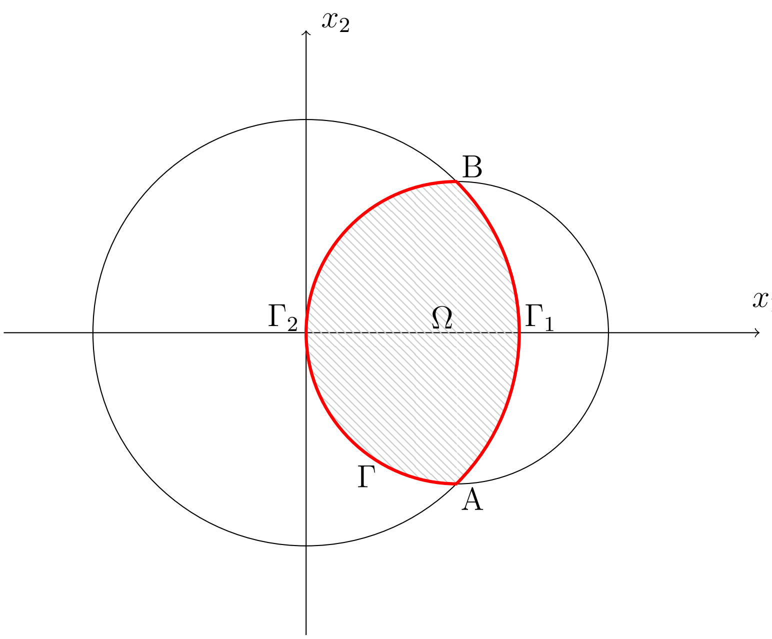
Pauta del control 3.

P1.- Calcula el area de la región Ω determinada por las dos desigualdades :

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2$$
$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1$$

R1.- Primero hagamos un dibujo de Ω. La primera desigualdad describe la región adentro des circúlo de centro $\binom{0}{0}$ y radio $\sqrt{2}$. La segunda desigualdad describe la región adentro del circúlo de centro $\binom{1}{0}$ y radio 1.



La parte achurada es Ω y la curva roja es el borde Γ. La integral que queremos calcular es

$$\iint_\Omega 1 \; dx_1 dx_2.$$

El teorema de Green nos dice que para cualquier campo F definido en todo Ω,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \; dx_1 dx_2.$$

donde la primera integral recorre Γ en el sentido antihorario. Para aplicar el teorema tenemos que encontrar un campo $\vec{F}$ que cumple $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 1$. Vamos a elegir $\vec{F} = \binom{0}{x_1}$ (otras posibilidades estan $\binom{-x_2}{0}$ o $\binom{-x_2/2}{x_1/2}$).
Aplicando el teorema de Green tenemos :

$$\iint_\Omega 1 \; dx_1 dx_2 = \int_\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{x}.$$

Ahora tenemos que parametrisar la curva Ω. La curva se compone de dos partes Γ_1 y Γ_2 que se juntan en los puntos de intersección A y B. Primero calculemos esos puntos de intersección que cumplen los ecuacciones de los dos circúlos.

$$\begin{array}{c} x_1^2+x_2^2=2 \\ (x_1-1)^2+x_2^2=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1^2+x_2^2=2 \\ 2x_1-1=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_2=\pm 1 \\ x_1=1 \end{array}$$

Mirando al dibujo es claro que $A=\binom{1}{-1}$ y $B=\binom{1}{1}$.
Ahora vamos a parametrizar Γ_1, la parte de derecha que va desde A hasta B. Es un circúlo de centro $\binom{0}{0}$, por lo que parece adaptado pasar en polares :

$$x_1 = r\cos\theta$$
$$x_2 = r\operatorname{sen}\theta$$

La ecuación del circúlo en polares es $r=\sqrt{2}$, así que nuestra parametrización es :

$$x_1(t) = \sqrt{2}\cos t$$
$$x_2(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$$

Para encontrar las cotas de integración, podemos ver que Γ_1 va desde A hasta B. Por lo tanto $\vec{x}(t_{min}) = A$ y $\vec{x}(t_{max}) = B$. Eso nos da :

$$\begin{array}{c} \sqrt{2}\cos t_{min} = -1 \\ \sqrt{2}\operatorname{sen} t_{min} = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \cos t_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \Leftrightarrow t_{min} = -\frac{\pi}{4}.$$

De la misma forma obtenemos que $t_{max} = \frac{\pi}{4}$. Solo nos queda integrar a lo largo de Γ_1 ocupando nuestra parametrización :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\operatorname{sen} t \\ \sqrt{2}\cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos^2 t \; dt \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2t) + 1 \; dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) - t\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

En el calcúlo ocupamos la formula trigonometrica $\cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1$.

Ahora parametrizamos la segunda parte Γ_2. También es un circúlo pero desplazado ya que su centro es $\binom{1}{0}$. Por lo tanto vamos a ocupar polares "desplazadas" :

$$x_1 = r\cos\theta + 1$$
$$x_2 = r\operatorname{sen}\theta + 0$$

De nuevo la ecuación del circúlo en polares es $r=1$ y obtenemos :

$$x_1(t) = \cos t + 1$$
$$x_2(t) = \operatorname{sen} t$$

Γ_2 va desde B hasta A. Por lo tanto $\vec{x}(t_{min}) = B$ y $\vec{x}(t_{max}) = A$. Eso nos da :

$$\begin{array}{c} \cos t_{min} + 1 = 1 \\ \operatorname{sen} t_{min} = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \cos t_{min} = 0 \\ \operatorname{sen} t_{min} = 1 \end{array} \Leftrightarrow t_{min} = \frac{\pi}{2}.$$

De la misma forma obtenemos que $t_{max} = \frac{3\pi}{2}$. Integramos a lo largo de Γ_2 :

$$\int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 t + \cos t \; dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} + \cos t \; dt$$

$$= \left[\frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) + \frac{t}{2} + \operatorname{sen} t \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 0 + \pi - 2$$

Y finalmente el area es :

$$\iint_\Omega 1 \; dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} + \int_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = 1 + \frac{\pi}{2} + \pi - 2 = \frac{3\pi}{2} - 1.$$